

УДК 517.55 + 517.987.1 + 517.576

От интегральных ограничений к поточечным оценкам

Р. А. Баладай, Б. Н. Хабибуллин

0. Истоки. \mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{C} — множества всех натуральных, вещественных и комплексных чисел; λ — мера Лебега на \mathbb{C}^n с евклидовой нормой $|\cdot|$. Для непустого ($\neq \emptyset$) открытого связного множества (области) $D \subset \mathbb{C}^n$ через $\text{Hol}(D)$ обозначаем класс всех голоморфных функций в D . Для пары $\alpha \in (0, +\infty)$ и $p \in (0, +\infty]$ конечность следующих квазинорм: при $p \neq +\infty$

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\frac{p\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} d\lambda(z) \right)^{1/p}, \quad \|f\|_{+\infty,\alpha} := \text{ess sup}_{z \in \mathbb{C}} \left(|f(z)| e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right) \quad (1)$$

для функций $f \in \text{Hol}(\mathbb{C})$ определяет пространства Фока – Баргмана $F_\alpha^p(\mathbb{C})$ [1]–[3].

Теорема F ([1, Теорема 2.7, Следствие 2.8]). Для любых $\alpha \in (0, +\infty)$, $p \in (0, +\infty]$, $z \in \mathbb{C}$ верна точная оценка $|f(z)| e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \leq \|f\|_{p,\alpha}$. Так, оценка $\|f\|_{+\infty,\alpha} \leq \|f\|_{p,\alpha}$ неумлучшаема.

Теорема F легко переносится на \mathbb{C}^n : без точных констант см. [2, 2.1], [3], а с неумлучшаемыми оценками — Пример 1 ниже. Для такого рода точных оценок предлагается

1. Общая схема. Терминология и факты из [4]. Пусть X — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, μ — положительная мера на X (пишем $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$),

(A) $\mathbf{a}: X \rightarrow X$ — μ -измеримое отображение и для любого компакта K из X мера $\mu(\mathbf{a}^{-1}K)$ его прообраза $\mathbf{a}^{-1}K$ конечна; $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ — функция.

Тогда определен образ $\mathbf{a}\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ меры μ при отображении \mathbf{a} , действующий по правилу $(\mathbf{a}\mu)(K) = \mu(\mathbf{a}^{-1}K)$ на произвольные компакты K из X ; $\int f d(\mathbf{a}\mu) = \int (f \circ \mathbf{a}) d\mu$ при условии μ -интегрируемости суперпозиции $f \circ \mathbf{a}$ (см. [4, гл. IV, § 6, Теорема 60]). Зафиксируем пару точек $x, y \in X$. Пусть отображение $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x^y: X \rightarrow X$ удовлетворяет условию (A) и

$$\mathbf{a}_x^y(x) = y, \quad \mathbf{a}_x^y\mu = \mu; \quad x, y \in X \text{ — пара фиксированных точек,} \quad (2)$$

где второе равенство означает, что мера μ инвариантна относительно отображения \mathbf{a}_x^y .

Пусть U — некоторый класс полунепрерывных сверху функций $u: X \rightarrow [-\infty, +\infty)$, замкнутый относительно сложения (поточечного) и инвариантный относительно отображения \mathbf{a}_x^y в том смысле, что $u \circ \mathbf{a}_x^y \in U$ для любой функции $u \in U$.

⁰Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-01-00024).

Лемма. Пусть в условиях этого п. 1 $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, для которой

$$(v - v \circ \mathbf{a}_x^y) \in U, \quad \text{а также, как следствие, } u_x^y := u \circ \mathbf{a}_x^y + (v - v \circ \mathbf{a}_x^y) \in U \quad (3)$$

для любой функции $u \in U$. Тогда для каждой функции $u \in U$ и каждой полунепрерывной сверху функции $\Phi: [-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$u(y) - v(y) + v(x) \stackrel{(2)}{=} u_x^y(x), \quad \int \Phi \circ (u - v) d\mu = \int \Phi \circ (u_x^y - v) d\mu \quad (4)$$

при условии, что существует конечный интеграл в левой части последнего равенства.

Доказательство. Первое равенство в (4) следует из равенств $u_x^y(x) = u(\mathbf{a}_x^y(x)) + v(x) - u(\mathbf{a}_x^y(x)) \stackrel{(2)}{=} u(y) + v(x) - v(y)$, а второе равенство в (4) — из цепочки равенств

$$\int \Phi \circ (u - v) d\mu \stackrel{(2)}{=} \int \Phi \circ (u - v) d(\mathbf{a}_x^y \mu) = \int \Phi \circ (u \circ \mathbf{a}_x^y - v \circ \mathbf{a}_x^y) d\mu = \int \Phi \circ \underbrace{(u \circ \mathbf{a}_x^y - v \circ \mathbf{a}_x^y + v - v)}_{u_x^y} d\mu.$$

Далее рассматриваем непрерывные положительные функции

$$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), \quad q: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty), \quad Q: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), \quad (5)$$

продолжимые по непрерывности в точки $\pm\infty, 0$ значениями из $[0, +\infty]$. Введем аналоги «квазинорм» соответственно функции $u \in U$ и для каждой точки $z \in X$ функционала $\mathbf{u} \mapsto (q \circ \mathbf{u})(x) \in (0, +\infty)$, действующего на функции $\mathbf{u} \in U$:

$$\|u\| := Q\left(\int \Phi \circ (u - v) d\mu\right) \quad \text{на } u \in U; \quad \|\delta_x\|^* := \sup_{\substack{0 < \|\mathbf{u}\| \leq +\infty \\ \mathbf{u} \in U}} \frac{q(\mathbf{u}(x))}{\|\mathbf{u}\|} > 0 \quad (6)$$

в предположении существования функции $\mathbf{u} \in U$ с $\mathbf{u}(x) \neq -\infty$.

Теорема 1. В условиях и обозначениях (3)–(6) имеем

$$q(u(y) - v(y) + v(x)) \leq \|\delta_x\|^* \cdot \|u\| \quad \text{для } u \in U \text{ с } \int \Phi \circ (u - v) d\mu \in (0, +\infty). \quad (7)$$

Если в дополнение к (3) имеем также $(v \circ \mathbf{a}_x^y - v) \in U$, т. е.

$$(v - v \circ \mathbf{a}_x^y) \in U \cap (-U) \neq \emptyset, \quad \text{где } -U := \{-u: u \in U\}, \quad (8)$$

а отображение $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \circ \mathbf{a}_x^y$ — сюръекция из $U \ni \mathbf{u}$ на U , то оценка (7) точна.

Доказательство. Из равенств (4) Леммы в обозначениях (6) имеем

$$\frac{q(u(y) - v(y) + v(x))}{Q(\int \Phi \circ (u - v) d\mu)} = \frac{q(u_x^y(x))}{Q(\int \Phi \circ (u_x^y - v) d\mu)} \quad \text{для функций } u \in U, \quad u_x^y \stackrel{(3)}{\in} U, \quad (9)$$

с конечными значениями интегралов $\int \Phi \circ (\cdot - v) d\mu \in (0, +\infty)$ в знаменателях дробей. Применяя к правой части (9) операцию \sup по всем $u_x^y \in U$, в обозначениях (6) получаем (7). При условии (8) и сюръективности отображения $u \mapsto u \circ \mathbf{a}_x^y$ для любой функции $\mathbf{u} \in U$ найдется функция $u \in U$, для которой в обозначениях (3) из Леммы имеем $\mathbf{u} = u_x^y$. Следовательно, применение операции \sup по всем $u_x^y \in U$ с ограничениями $0 < \|u_x^y\| < +\infty$ к правой части реализует значение $\|\delta_x\|^*$. При этом равенство в (9) для любой функции $u \in U$ с соответствующими предположениями о конечности $\|u\|$ доказывает точность (7).

2. Голоморфная версия. Для области $X := D \subset \mathbb{C}^n$, $\mu \in \mathcal{M}^+(D)$, $p \in (0, +\infty)$, функции $w: D \rightarrow \mathbb{R}$ с ограничением $\int_D e^{-pw} d\mu \in (0, +\infty)$, а также $f \in \text{Hol}(D)$ введем квазинормы

$$\|f\|_{p;w} \stackrel{(1)}{:=} \left(\frac{1}{\int_D e^{-pw} d\mu} \int_D |f|^p e^{-pw} d\mu \right)^{1/p} < +\infty, \quad \|f\|_{+\infty;w} \stackrel{(1)}{:=} \text{ess sup}_{z \in D} (|f(z)| e^{-w(z)}). \quad (10)$$

Теорема 2. Пусть $0 \in D$, $z \in D$ и голоморфное отображение $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0^z: D \rightarrow D$ удовлетворяет условиям (A), $\mathbf{a}_0^z(0) \stackrel{(2)}{=} z$ и мера μ инвариантна относительно \mathbf{a}_0^z , а также

$$\exp(w - w \circ \mathbf{a}_0^z) \stackrel{(3)}{\in} |\text{Hol}(D)| := \{|\varphi|: \varphi \in \text{Hol}(D)\}. \quad (11)$$

Тогда для $f \in \text{Hol}(D)$ при $\|f\|_{p;w} < +\infty$ имеет место оценка

$$|f(z)| e^{-w(z)} \leq \|\delta_0\|_{p;w}^* \cdot \|f\|_{p;w} \cdot e^{-w(0)}, \quad \text{где } \|\delta_0\|_{p;w}^* := \sup_{\substack{0 < \|\varphi\|_{p;w} < +\infty \\ \varphi \in \text{Hol}(D)}} \frac{|\varphi(0)|}{\|\varphi\|_{p;w}}. \quad (12)$$

Если $\varphi \mapsto \varphi \circ \mathbf{a}_0^z$ — сюръекция из $\text{Hol}(D) \ni \varphi$ на $\text{Hol}(D)$, то эта оценка точна. Если такое отображение \mathbf{a}_0^z существует для каждой точки $z \in D$, то при всех $p \in (0, +\infty)$ оценка

$$\|f\|_{+\infty;w} \leq \|\delta_0\|_{p;w}^* \cdot \|f\|_{p;w} \cdot e^{-w(0)} \quad \text{неулучшаема.} \quad (13)$$

Доказательство. По Теореме 1 при $x := 0$ и $y := z$ с $U := \{\ln |f|: f \in \text{Hol}(D)\}$, $\Phi(t) \stackrel{(5)}{:=} e^{pt}$ и $q(t) \stackrel{(5)}{:=} e^t$ при $t \in \mathbb{R}$, $Q(t) \stackrel{(5)}{:=} (t / \int_D e^{-pw} d\mu)^{1/p}$ при $t \in (0, +\infty)$ получаем оценку (12). Из (11) следует представление $w - w \circ \mathbf{a}_0^z = \ln |\psi|$ с $\psi \in \text{Hol}(D)$ и, поскольку $w(D) \subset \mathbb{R}$, функция ψ не имеет нулей в D и $1/\psi \in \text{Hol}(D)$. Таким образом, $w - w \circ \mathbf{a}_0^z \in -U$, выполнено условие (8) и при условии сюръективности из Теоремы 1 получаем точность оценки (12). Когда z пробегает всю область D , из второго определения в (10) и (12) следует (13).

Условие (11) эквивалентно плюригармоничности функции $w - w \circ \mathbf{a}_0^z$ в области D , когда область D звездная с центром в нуле [5, Предложение 2.2.13], как ниже в Примерах 1–3, где при определении функций, отображений, а также мер через их плотность точка $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ пробегает назначенные области $D \subset \mathbb{C}^n$.

Пример 1. Для $D = \mathbb{C}^n$ и $z \in \mathbb{C}^n$ подходящий выбор $\mu := \lambda$, $\mathbf{a}_0^z: z \mapsto z + z - \text{автоморфизм}$, $w(z) := \frac{\alpha}{2}|z|^2$ с плюригармонической $w(z) - (w \circ \mathbf{a}_0^z)(z) = -\frac{\alpha}{2}|z|^2 - \alpha \text{Re} \langle z, z \rangle$ по $z \in \mathbb{C}^n$, где $\langle z, z \rangle$ — скалярное произведение [6, 1.1.2(1)], $\|\delta_0\|_{p;w}^* \stackrel{(12)}{=} 1$ ввиду субгармоничности $|f|^p$ при $f \in \text{Hol}(\mathbb{C}^n)$ и радиальности w . Теорема 2 дает Теорему F для $F_\alpha^p(\mathbb{C}^n)$ [2]–[3] при $n \geq 1$.

Другой возможный выбор при тех же $\mu := \lambda$, \mathbf{a}_0^z и $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ — это функция $w(z) := \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j}{2}|z_j|^2$ с $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (0, +\infty)^n$ и с плюригармонической функцией $w(z) - (w \circ \mathbf{a}_0^z)(z) = -\sum_{j=1}^n (\frac{\alpha_j}{2}|z_j|^2 + \alpha_j \text{Re } z_j \bar{z}_j)$ по $z \in \mathbb{C}^n$, где, по-прежнему, $\|\delta_0\|_{p;w}^* \stackrel{(12)}{=} 1$ из плюрисубгармоничности $|f|^p$ при $f \in \text{Hol}(\mathbb{C}^n)$ и радиальности по каждой переменной z_j функции w . Возможен и аналогичный выбор функции w , радиально зависящей от векторов-компонент из подпространств, представляющих \mathbb{C}^n в виде прямой суммы. Теорема 2 с точными оценками (12)–(13) применима к любым подобным конструкциям с $\|\delta_0\|_{p;w}^* \stackrel{(12)}{=} 1$ ввиду субгармоничности сужений функции $f \in \text{Hol}(D)$ на подпространства.

Пример 2. Для единичного шара $D := \mathbb{B} := \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ и точки $z \in \mathbb{B}$ выбираем меру через плотность $d\mu(z) := (1 - |z|^2)^{-n-1} d\lambda(z)$ [6, 2.2.6(ii)], $\alpha_0^z := \varphi_z$ — автоморфизм шара, выписанный в явном виде в [6, 2.2.1(2)] с требуемыми в Теореме 2 свойствами [6, 2.2.2(i), 2.2.2(vi), 2.2.6(ii)], функцию $w(z) := -\frac{\alpha+n+1}{p} \ln(1 - |z|^2)$ с $\alpha \in (-1, +\infty)$ при $p \in (0, +\infty)$, для которой по тождеству [6, 2.2.2(iv)] получаем плюригармоническую в \mathbb{B} функцию $w(z) - (w \circ \alpha_0^z)(z) = \frac{\alpha+n+1}{p} \left(\ln|(1 - \langle z, z \rangle)| - \ln(1 - |z|^2) \right)$ по $z \in \mathbb{B}$. Вновь применима Теорема 2 с точными оценками (12)–(13), где $\|\delta_0\|_{p,w}^* \stackrel{(12)}{=} 1$ так же, как в Примере 1. Получаемые при таком выборе подклассы функций $f \in \text{Hol}(\mathbb{B})$ с $\|f\|_{p,w} < +\infty$ — пространства Бергмана $A_\alpha^p(\mathbb{B})$ [7, 1.3], [8], или Фока–Бергмана для шара \mathbb{B} [9, 5.1.2].

Пример 3. Для круга $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, единичного поликруга $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{C}^n$ и точки $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{D}^n$ выбираем меру через плотность $d\mu(z_1, \dots, z_n) = \otimes_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{-2} d\lambda(z_j)$ — тензорное произведение мер Лебега [4, гл. IV, § 8], $\alpha_0^z(z) = \left(\frac{z_1 - \bar{z}_1}{1 - \bar{z}_1 z_1}, \dots, \frac{z_n - \bar{z}_n}{1 - \bar{z}_n z_n} \right)$ — автоморфизм поликруга [10, 7.3.3], удовлетворяющий требованиям Теоремы 2, функцию $w(z) := -\sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j+2}{p} \ln(1 - |z_j|^2)$ с $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (-1, +\infty)^n$ при $p \in (0, +\infty)$, для которой плюригармонична в \mathbb{D}^n функция $w(z) - (w \circ \alpha_0^z)(z) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j+2}{p} \left(\ln|(1 - z_j \bar{z}_j)| - \ln(1 - |z_j|^2) \right)$ по $z \in \mathbb{D}^n$. Применима Теорема 2 с точными оценками (12)–(13), где $\|\delta_0\|_{p,w}^* \stackrel{(12)}{=} 1$ из плюри-субгармоничности $|f|^p$ при $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}^n)$ и радиальности по каждой переменной z_j функции w . При этом функции $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}^n)$ с $\|f\|_{p,w} < +\infty$ образуют пространства Бергмана $A_\alpha^p(\mathbb{D}^n)$ для \mathbb{D}^n [7, 1.3]. Гомотетия по переменным z_j позволяет легко получить точные оценки (12)–(13) Теоремы 2 и для поликругов $D = \prod_{j=1}^n r_j \mathbb{D}$ с $\vec{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (0, +\infty)^n$.

Замечание. Применение возрастающей функции к обеим частям неравенства из (12) с последующим интегрированием по какой-либо конечной мере $\nu \in \mathcal{M}^+(D)$ по переменной $z \in D$, позволяет получить дополнительные оценки, как в [1, Теорема 2.10], [2, Лемма 2.2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] K. Zhu, *Analysis on Fock spaces*, Graduate Texts in Mathematics, **263**, Springer, NY, 2012.
- [2] X. Massaneda, P. J. Thomas, *Interpolating sequences for Bargmann-Fock spaces in \mathbb{C}^n* , Indag. Mathem., N.S., **11:1** (2000), 115–127.
- [3] N. Lindholm, *Sampling in Weighted L^p Spaces of Entire Functions in \mathbb{C}^n and Estimates of the Bergman Kernel*, Journal of Functional Analysis, **182** (2001), 390–426.
- [4] Л. Шварц, *Анализ, Т. I*, Мир, М., 1972.
- [5] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [6] У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из \mathbb{C}^n* , Мир, М., 1984.

- [7] С. В. Шведенко, *Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре*, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ., ВИНТИ, М., **23** (1985), 3–124.
- [8] R. Zhao, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces in the unit ball of \mathbb{C}^n* , Mémoires de la Société Mathématique de France, **115**, 2008.
- [9] Переломов А.М. *Обобщенные когерентные состояния и их применение*, Наука, М., 1987.
- [10] У. Рудин, *Теория функций в поликруге*, Мир, М., 1974.